ΗΜΙΕΥΘΕΑ ΓΙΝΟΜΕΝΑ

H, K ομάδες

$\varphi : K \longrightarrow Aut(H)$ ομομορφ. ομάδων

$1 \to H \to \underbrace{H \times_\varphi K}_{\substack{\text{Ημιευθ. γινόμενο} \\ \text{ως προς } \varphi}} \to K \to 1$

$1 \to H \to O \to K \to 1$

$H \trianglelefteq O$ και $O/H \cong K$

Κατά πόσο η O χαρακτηρίζεται απο τις H και K

$1 \to SL(n,\mathbb{R}) \to GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^* \to 1$

Πχ

1) Είναι η $GL(n,\mathbb{R})$ ευθύ γινόμενο των $SL(n,\mathbb{R})$ και $\mathbb{R}^* \cong K \leq GL(n,\mathbb{R}) \cong SL(n,\mathbb{R}) \times K$

$K = \{A / A \text{ διαγώνιοι στην } GL(n,\mathbb{R})\} = \{rI_n \mid r \in \mathbb{R}^*\}$

Δεν είναι ευθύ γινόμενο (γιατί;)

2) $0 \to \mathbb{Z}_4 \to \underset{\#\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2} \to \mathbb{Z}_2 \to 0$

$0 \to \mathbb{Z}_4 \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}_8 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$

Δηλ. $\mathbb{Z}_4 \cong 2\mathbb{Z}_8$ και $\mathbb{Z}_8/2\mathbb{Z}_8 \cong \mathbb{Z}_2$

3) $D_4 = \langle R, S \mid R \text{ στροφή}, S \text{ συμμετρία} \rangle$

$R^4 = 1 = S^2$ και $SR^2S = R^{-1}$

$|D_4| = 8$, $H = \langle R \rangle$ με $|H| = 4 \Rightarrow [D_4 : H] = 2 \Rightarrow H \trianglelefteq D_4$

$1 \to \langle R \rangle \to D_4 \to \mathbb{Z}_2 = \langle S \rangle \to 1$

4) $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$, $i^4 = j^4 = k^4 = 1$, $ij = k$, $ji = -k$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & \langle i \rangle & \longrightarrow & Q_8 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 1 \\
 & & \wr\| & & \cancel{\|\wr} & & \|\wr & & \\
 & & \mathbb{Z}_4 & & & & & & \\
 & & \wr\| & & & & & & \\
1 & \longrightarrow & \langle R \rangle & \longrightarrow & D_4 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 1
\end{array}
$$

$$1 \to \langle R^2 \rangle \to D_4 \to D_4/\langle R^2 \rangle \to 1$$

$$\langle R^2 \rangle \lhd D_4 \qquad\qquad \begin{array}{c} \wr\| \\ \langle R \rangle/\langle R^2 \rangle \times \langle S \rangle \end{array}$$

Δηλ. έχω (με άλλο τρόπο):

$$1 \to \mathbb{Z}_2 \to D_4 \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to 1$$

5) $n \geq 5$, $\Sigma_n \rhd A_n \rhd 1$

$\Sigma_n / A_n \cong \mathbb{Z}_2$ Δηλ. δεν "σπάει".

A_n απλή δεν μπορεί να "διασπαστεί" σε μικρότερες.

ΕΡΩΤΗΜΑ

$$1 \lhd \underset{\text{μεγ.}}{A'} \lhd \underset{\text{μεγ.}}{A} \lhd O$$

$A''/A \lhd O/A$: $A \lhd A'' \lhd O$

αβελιανή;

$n=3$, $1 \lhd A_3 = \langle f \rangle \lhd \Sigma_3$ $\qquad \left|\Sigma_n / A_n\right| = 2 \Rightarrow \Sigma_n / A_n \cong \mathbb{Z}_2$

Σ_n όχι ευθύ γινόμενο

$\mathbb{Z}_3 \lhd \Sigma_3 \cong \mathbb{Z}_3 \rtimes \mathbb{Z}_2$

$n=4$

$$1 \lhd \langle (1,2),(3,4) \rangle \lhd \{1, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4)\} \lhd A_4 \lhd \Sigma_4$$

$\mathbb{Z}_2 \cong D/(1,2)(3,4)$, $\mathbb{Z}_3 \cong A_4/D$, $\Sigma_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$

ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΣΕΙΡΕΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω G ομάδα και A_i, $i=1,2,\dots,\nu$ μία ακολουθία υποομάδων της $A_i \leq G$. Ζητάμε $A_i \lhd A_{i-1}$, $i=\nu,\nu-1,\dots,1$

$A_0=G$, $1=A_\nu \lhd A_{\nu-1} \lhd \dots \lhd A_1 \lhd A_0 = G$

Μια τέτοια σειρά καλείται κανονική

Προσοχή: $A_i \lhd A_{i-1} \not\Rightarrow A_i \lhd G$

Πχ $n=2^2\cdot 3\cdot 5^3$

$1 \cong 2^2\cdot 3\cdot 5^3 \mathbb{Z}_n \leq 2\cdot 3\cdot 5^3 \mathbb{Z}_n \leq 3\cdot 5^3 \mathbb{Z}_n \leq 5^3 \mathbb{Z}_n \leq 5^2 \mathbb{Z}_n \leq 5\mathbb{Z}_n \leq \mathbb{Z}_n$

μέγιστη

ΟΡΙΣΜΟΣ

Δύο κανονικές σειρές της G

$1 \lhd A_\nu \lhd \dots \lhd A_0 = G$ και $1 \lhd B_\mu \lhd \dots \lhd B_0 = G$

θα λέγονται ισόμορφες αν $\nu=\mu$ και τα αντίστοιχα πηλίκα είναι ισόμορφα.

Πχ

Στην $\mathbb{Z}_{2^2\cdot 3\cdot 5^3}$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω G ομάδα και δύο κανονικές σειρές της

$1=A_\nu \lhd \dots \lhd A_0 = G$ και $1=B_\mu \lhd \dots \lhd B_0 = G$

Η δεύτερη καλείται επιλέπτυνση της πρώτης αν $\mu \geq \nu$ και κάθε στοιχείο της πρώτης υπάρχει και στη δεύτερη. Αν μία κανονική σειρά δεν έχει γνήσια επιλέπτυνση, θα καλείται συνθετική

ΠΡΟΤΑΣΗ

Έστω G ομάδα και μια κανονική σειρά της
$1 \triangleleft A_\nu \triangleleft \dots \triangleleft A_0 = G$ τα επόμενα είναι ισοδύναμα

1) Είναι συνθετική
2) Οι ομάδες A_{i-1}/A_i είναι απλές
3) Η A_i είναι μέγιστη κανονική της A_{i-1}.

ΘΕΩΡΗΜΑ:

Δύο συνθετικές σειρές μιας ομάδας G είναι ισομορφες

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια ομάδα G καλείται επιλύσιμη αν έχει κανονική σειρά της οποίας όλα τα πηλίκα είναι αβελιανές ομάδες

Πχ

D_ν είναι επιλύσιμη

$1 \triangleleft \underset{\mathbb{Z}_\nu}{\underset{\cong}{\langle R \rangle}} \triangleleft D_\nu$, $D_\nu / \langle R \rangle \cong \langle S \rangle \cong \mathbb{Z}_2$

Ανώτερες & Κατώτερες σειρές:

Το κέντρο $Z(G)$ δείχνει "πόσο" μακριά είμαστε από το να είναι αβελιανή.

$Z(G) = G \Leftrightarrow G$ αβελιανή

"Πόσο" μακριά είναι το $Z(G)$ από την G.

Ορίζεται $G/Z(G)$. Πόσο μακριά βρίσκεται η $G/Z(G)$ από το να είναι αβελιανή

βρες $Z(G/Z(G)) \triangleleft G/Z(G)$

$\exists Z^2(O) \triangleleft O$ με $Z(O/Z'(O)) \cong Z^2(O)/Z'(O)$

$1 \triangleleft Z'(O) \triangleleft Z^2(O) \triangleleft \dots \triangleleft O$

$Z(O/Z'(O)) = \{\alpha Z'(O) / \alpha Z'(O) b Z'(O) = b Z'(O) a Z'(O)\} =$ $\forall b \in O$

$= \{$επιλέγουμε τα α με αυτή την ιδιότητα$\} =$

$\alpha Z(O) \cdot \alpha' Z(O) \in Z(O/Z'(O)) \Leftrightarrow \alpha Z(O) \alpha' Z(O) b Z(O) =$

$= b Z(O) a Z(O) a' Z(O) \Rightarrow \alpha \cdot \alpha' b Z(O) = b \alpha \alpha' Z(O) \Rightarrow$

$b a b' \in Z^2(O) \Leftrightarrow b a b^{-1} \gamma Z(O) = \gamma b a b^{-1} Z(O), \ \forall \gamma \in O$

Υποθέτουμε ότι ορίστηκε η $Z^k(O)$, τότε ορίζεται μία κανονική υποομάδα $Z^{k+1}(O)$ της O με

$Z^{k+1}(O)/Z^k(O) \cong Z(O/Z^k(O))$

Ορίζεται η ανώτερη κεντρική σειρά

$1 = Z^0(O) \triangleleft Z'(O) = Z(O) \triangleleft Z^2(O) \triangleleft \dots \triangleleft O$

ΟΡΙΣΜΟΣ:

Μια ομάδα O καλείται μηδενοδύναμη αν υπάρχει k με $Z^k(O) = O$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Κάθε μηδενοδύναμη είναι επιλύσιμη.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Κάθε πεπερασμένη ομάδα είναι μηδενοδύναμη αν.ν είναι το ευθύ γινόμενο των Sylow υποομάδων της

G όχι αβελιανή

$ab = ba \ \forall a,b \Leftrightarrow G$ αβελιανή

$a^{-1} \cdot b^{-1} a b = 1 \ \forall a,b \Leftrightarrow G$ αβελιανή

Commuter = μεταθέτης

$[G,G] = \langle a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b \ / \ \forall a,b \in G \rangle \leq G$

$[G,G] = \langle 1 \rangle \Leftrightarrow G$ αβελιανή

Πόσο "μεγάλο" είναι το $[G:G]$;

$[G,G] \trianglelefteq G \Rightarrow G/[G,G]$ αβελιανή

ΟΡΙΣΜΟΣ

Με $[a,b] = a^{-1} \cdot b^{-1} a \cdot b$ και $G_1 = [G,G] = \langle a^{-1} b^{-1} a b / a,b \in G \rangle$

ΠΡΟΤΑΣΗ

Η $G_1 = [G,G] = G'$ είναι η μικρότερη κανονική κανονική της G ώστε $G/[G,G]$ είναι αβελιανή

1) Αν $Y \trianglelefteq G$ και το G/Y είναι αβελιανή τότε $[G,G] \leq Y$

2) Αν $Y \leq G$ και $[G,G] \leq Y$ τότε $Y \trianglelefteq G$ και G/Y αβελιανή

Όπως ορίζεται η $G_1 = G' = [G,G]$ ορίζεται και ο μεταθέτης του μεταθέτη;

$G_2 = [G', G'] = \langle \gamma^{-1} \delta^{-1} \gamma \delta \mid \gamma, \delta \in G' = [G,G] \rangle =$

δηλαδή γ ή $\delta = [a_1, a_2][b_1, b_2], \ldots, [k_1, k_2]$

Με τον ίδιο τρόπο ορίζονται και οι ανώτερο

$G_2 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq G_0 = G$

Αν $a, b, \gamma \in G$ τότε ορίζεται το στοιχείο

$[a,b,\gamma] = [[a,b],\gamma] = [a,b]^{-1} \gamma^{-1} [a,b] \gamma =$

$= (a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot a \cdot b)^{-1} \gamma^{-1} (a^{-1} b^{-1} \cdot a b) \gamma =$

$= b^{-1} a^{-1} \cdot b a \gamma^{-1} a^{-1} \cdot b^{-1} a b \gamma .$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $[a, b\gamma] = [a,\gamma] \cdot [a,b] \cdot [a,b,\gamma]$

- $[ab,\gamma] = [a,\gamma][a,\gamma,b][b,\gamma]$

2) Αν $H \trianglelefteq G$ και $Y \leq G$

τοτε το $[H,Y] = \langle [a,b] \mid a \in H$ και $b \in Y \rangle \leq G$

3) Αν $H, Y \trianglelefteq G \Rightarrow [H,Y] \trianglelefteq G$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η G επιλύσιμη αν.ν $\exists k : G_k = \{e\}$. e: μοναδ.